一维随机游动的研究

The Study of One-dimensional Random Walk

刘润树 金梓阳 谢张天

Runshu Liu, Ziyang Jin, Zhangtian Xie

指导老师：徐国君

Adviser, Guojun Xu

杭州外国语学校

Hangzhou Foreign Languages School

2011 年 8 月

August, 2011

摘要

本论文集中了一些关于一维随机游动的研究和思考。

首先，我们通过求分布列、数学期望以及方差等数字特征研究了有限步一维随机游动。然后由有限推广到无限，研究了无限步一维随机游动。根据探究得到的二项分布的项与其之间的关系，利用棣莫弗方法, 导出了其概率密度函数。

随后又分别对一维随机游动增加反射壁和吸收壁两个条件。同样从有限步出发，通过求分布列来寻找规律。对比增加条件前后的情况，我们从杨辉三角的变形中寻找到一般算法，并类推到无限步。

最后对全文进行了总结。

关键词

随机游动 杨辉三角 反射壁 吸收壁

Abstract

This thesis focuses on random walk in one dimension.

Firstly, we studied simple random walk by finding out its distribution, mathematical expectation, variance and some other digital features. Then, extended to ‘infinite step’, we further studied random walk. According to the relation between the items of the binomial distribution and random walk, we got its probability density function using De Moivre methods.

‘Reflection wall’ and ‘absorbing wall’are respectively added to the simple random walk. We also started from ‘inite step’and found out its distribution in search of a law. From Pascal’s triangle, we got a general algorithm which can be extended to ‘infinite step’ comparing the situation before and after adding the conditions.

At last, we drew a conclusion.

Key words

Random walk; Pascal’s triangle; Reflection wall; Absorbing wall

目录

P1.　封页

P2.　摘要 关键词

P3.　目录

P4.　前言

P4.　1.1 一维随机游动定义

P4.　1.2 有限步一维随机游动

P6.　1.3 无限步一维随机游动

P9.　1.4 小结

P9.　2.1 反射壁定义

P10. 2.2 存在反射壁情况下的有限步一维随机游动

P12. 2.3 存在反射壁情况下的无限步一维随机游动

P12. 2.4 小结

P12. 3.1 吸收壁一维随机游动定义

P12. 3.2 存在吸收壁情况下的有限步一维随机游动

P15. 3.3 存在吸收壁情况下的无限步一维随机游动

P15. 3.4 小结

P16. 结论

P16. 参考文献

前言

“彳亍而行，如醉酒者”形象而又生动地描述了随机游动的特点，就好像一个喝得晕头转向的醉汉不知道什么时候往什么方向行走。无论是在宏观世界，还是在微观世界，或如一个四处迁徙的种群，或如一个不断碰撞的水分子，都体现着随机游动的特点——即在随机性中体现着规律性，而又在规律性中蕴含着随机性。而本文将着重研究简单的和附加条件的一维随机游动，期望在一条简单的数轴上发现不简单的规律。

1.1 一维随机游动定义

点 P 在数轴 x 上作随机游动，即点 P 从原点 O 出发，每次向 x 轴正方向，或 x 轴负方向移动 1 个单位。

1.2 有限步一维随机游动

问题

求点 P 经过 n 次随机游动出现在数轴 x 各位置的概率，以及点 P 出现位置的数学期望和方差。

分析

经过 n 次随机游动，点 P 出现在位置 s 的可能情况

n \ s	…	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
1											1		1										
2										1		2		1									
3									1		3		3		1								
4								1		4		6		4		1							
5							1		5		10		10		5		1						
6						1		6		15		20		15		6		1					
7					1		7		21		35		35		21		7		1				
8				1		8		28		56		70		56		28		8		1			
9			1		9		36		84		126		126		84		36		9		1		
10		1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1	
…																							

表 1

由表 1 可得，经过 n 次随机游动，点 P 出现在位置 s 的可能情况的排列满足“杨辉三角”的排列

点 P 总共经过 n 次移动，令点 P 向 x 轴正方向移动 i 次，其中 0≤i≤n，i∈Z，并且点 P 每次向 x 轴正方向移动的概率为 p，则点 P 向 x 轴负方向移动（n-i）次，点 P 每次向 x 轴负方向移动的概率为（1-p）。

那么点P出现在位置（2i-n）的概率P_1满足二项分布为

$$\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{n-i}$$

令s=2i-n，其中-n≤s≤n，s∈Z，则点P出现在位置s的概率P_1为

$$\binom{n}{\frac{n+s}{2}}\cdot p^{\frac{n+s}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-s}{2}}$$

解答

点P出现在数轴x各位置概率P_1的分布列

当n为奇数时

X	-n	-(n-2)	…	-1	1	…	n-2	n
p	$\binom{n}{0}\cdot(1-p)^{n}$	$\binom{n}{1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}$	…	$\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cdot p^{\frac{n-1}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n+1}{2}}$	$\binom{n}{\frac{n+1}{2}}\cdot p^{\frac{n+1}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-1}{2}}$	…	$\binom{n}{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot(1-p)$	$\binom{n}{n}\cdot p^{n}$

当n为偶数时

X	-n	-(n-2)	…	-2	0	2	…	n-2	n
p	$\binom{n}{0}\cdot(1-p)^{n}$	$\binom{n}{1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}$	…	$\binom{n}{\frac{n}{2}-1}\cdot p^{\frac{n}{2}-1}\cdot(1-p)^{\frac{n}{2}+1}$	$\binom{n}{\frac{n}{2}}\cdot p^{\frac{n}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n}{2}}$	$\binom{n}{\frac{n}{2}+1}\cdot p^{\frac{n}{2}+1}\cdot(1-p)^{\frac{n}{2}-1}$	…	$\binom{n}{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot(1-p)$	$\binom{n}{n}\cdot p^{n}$

点P出现位置的数学期望

根据数学期望定义，点 P 出现位置的数学期望为

$$E(x)=\sum_{s=-n}^{n}s\cdot\binom{n}{\frac{n+s}{2}}\cdot p^{\frac{n+s}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-s}{2}}=\sum_{i=0}^{n}(2i-n)\cdot\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{n-i}$$

根据组合恒等式$n\cdot\binom{n-1}{m-1}=m\cdot\binom{n}{m}$，变形得

$$E(x)=\sum_{i=0}^{n}2i\cdot\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{n-i}-\sum_{i=0}^{n}n\cdot\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{n-i}=$$

$$2np\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n-1}{i-1}\cdot p^{i-1}\cdot(1-p)^{n-i}-n\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{n-i}$$

根据二项式定理，化简整理得

$$E(x)=2np-n$$

点 P 出现位置的方差

根据方差定义，点 P 出现位置的方差为

$$\mathrm{Var(x)}=\sum_{s=-n}^{n}(s-(2\ np-n))^2\cdot\binom{n}{\frac{n+s}{2}}\cdot p^{\frac{n+s}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-s}{2}}=$$

$$\sum_{i=0}^{n}(2\ i-2\ np)^2\cdot\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$$

根据组合恒等式$n\cdot\binom{n-1}{m-1}=m\cdot\binom{n}{m}$，变形得

$$\mathrm{Var(x)}=\sum_{i=0}^{n}4\ i^2\cdot\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}-\sum_{i=0}^{n}8\ npi\cdot\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}+$$

$$\sum_{i=0}^{n}4\ n^2p^2\cdot\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}=4n(n-1)p^2\sum_{i=0}^{n}\binom{n-2}{i-2}\cdot p^{i-2}\cdot(1-p)^{n-i}+$$

$$4np\sum_{i=0}^{n}\binom{n-1}{i-1}\cdot p^{i-1}\cdot(1-p)^{n-i}-8n^2p^2\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n-1}{i-1}\cdot p^{i-1}\cdot(1-p)^{n-i}+$$

$$4\ n^2p^2\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$$

根据二项式定理，化简得

$$\mathrm{Var(x)}=4n(n-1)p^2+4np-8\ n^2p^2+4\ n^2p^2$$

整理得

$$\mathrm{Var(x)}=4np(1-p)$$

1.3 无限步一维随机游动

考虑p=$\frac{1}{2}$，n为无穷大偶数的情况

令 n=2m，m∈Z，其中心项为

$$\mathrm{B(m)}=\binom{2\ m}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\ m}=\frac{2\,m!}{m!\cdot m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\ m}$$

根据斯特林公式$\lim_{n\to\infty}n!=\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot \mathrm{e}^{-n}$，其中心项可表示为

$$\mathrm{B(m)}=\frac{\sqrt{2\pi\cdot2\,m}\cdot2\ m^{2\ m}\cdot\mathrm{e}^{-2\ m}}{\sqrt{2\pi m}\cdot m^m\cdot\mathrm{e}^{-m}\cdot\sqrt{2\pi m}\cdot m^m\cdot\mathrm{e}^{-m}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\ m}=\frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

即其中心项可表示为

$$B(m)=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

令 d 为常数，d∈Z，其任意项为

$$B(m+d)=\binom{2m}{m+d}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}=\frac{2m!}{(m+d)!\cdot(m-d)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

其任意项与中心项的比

$$\frac{B(m+d)}{B(m)}=\frac{m!\cdot m!}{(m+d)!\cdot(m-d)!}$$

根据斯特林公式$\lim_{n\to\infty}n!=\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}$，其任意项与中心项的比可表示为

$$\frac{B(m+d)}{B(m)}=\frac{\sqrt{2\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}}{\sqrt{2\pi}\cdot(m+d)^{m+d+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot(m-d)^{m-d+\frac{1}{2}}\cdot e^{-m}}=$$

$$\frac{m^{2m+1}}{(m+d)^{m+d+\frac{1}{2}}\cdot(m-d)^{m-d+\frac{1}{2}}}$$

两边取对数可得

$$\ln\left(\frac{B(m+d)}{B(m)}\right)=(2m+1)\cdot\ln(m)-\left(m+d+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln(m+d)-\left(m-d+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln(m-d)=$$

$$-\left(m+d+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{d}{m}\right)+-\left(m-d+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(1-\frac{d}{m}\right)$$

∵m 为无穷大偶数，d 为常数 ∴$\frac{d}{m}\to 0$

根据麦克劳林展开式$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+Rn(x)\ (|x|<1)$，取两项展开得

$$\ln\left(\frac{B(m+d)}{B(m)}\right)=-\left(m+d+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{d}{m}-\frac{d^2}{2m^2}\right)+-\left(m-d+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{d}{m}-\frac{d^2}{2m^2}\right)=-\frac{d^2}{m}+\frac{d^2}{2m^2}$$

舍去二阶小量得

$$\ln\left(\frac{B(m+d)}{B(m)}\right)=-\frac{d^2}{m}$$

其任意项可表示为

$$B(m+d)=B(m)e^{-\frac{d^2}{m}}=\frac{1}{\sqrt{\pi m}}\cdot e^{-\frac{d^2}{m}}$$

即其任意项可表示为

$$B(m+d)=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\cdot e^{-\frac{2d^2}{n}}$$

将任意 k 项相加得

$$\sum_{d=0}^{k} B(m+d) = \int_{0}^{k} \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \cdot e^{-\frac{2d^2}{n}} \mathrm{d}d$$

即

$$\sum_{d=0}^{k} P_1(X=m+d) = \int_{0}^{k} \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \cdot e^{-\frac{2d^2}{n}} \mathrm{d}d$$

点 P 经过无限次随机游动出现在区间(a, b)的概率为

$$\lim_{n\to\infty} P_1(a<x<b) = \int_{a}^{b} \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \cdot e^{-\frac{2x^2}{n}} \mathrm{d}x$$

令 $y=\frac{x}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$ ，将其标准化得

$$\lim_{n\to\infty} P_1(a<y<b) = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y$$

.

图 1

图1为一维随机游动中点P出现位置的概率密度函数f(x)=$\frac{2}{\sqrt{2\pi\cdot n}} \cdot e^{-\frac{2x^2}{n}}$，当n从1取到100时的图像。

.

图 2

图 2 为随机游动中 p=0.5 的情况 $P(X=\frac{n}{2}+x)=\binom{n}{\frac{n}{2}+x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$，当 n 从 1 取到 100 时由计算机拟合的图像。

图 3

图 3 为随机游动中 p=0.51 的情况 $P(X=\frac{n}{2}+x)=\binom{n}{\frac{n}{2}+x}\cdot 0.51^{\frac{n}{2}+x}\cdot 0.49^{\frac{n}{2}-x}$，当 n 从 1 取到 100 时由计算机拟合的图像。

随着 p 的增大，需要更大的 n 才能更好的吻合，因此不一一枚举图像。

1.4 小结

由上可知，所得一维随机游动中点P出现位置的概率密度函数 $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ 能够较好的体现其概率分布，其中n越大吻合的越好。

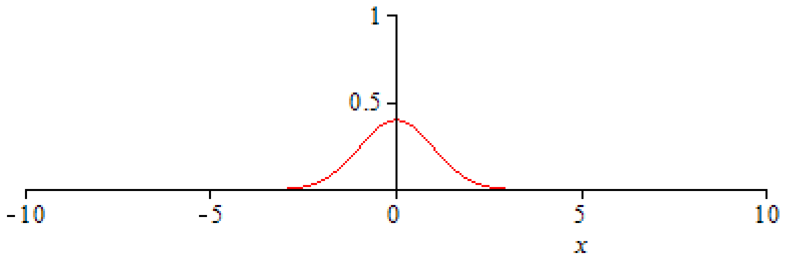


图 4

2.1 反射壁定义

点 P 在数轴 x 上遇到反射壁，即点 P 移动一个单位到反弹壁后，便向相反方向移动一个单位。

2.2 存在反射壁情况下的有限步一维随机游动

问题

位置 r 有一道反射壁，求点 P 经过 n 次随机游动出现在数轴 x 各位置的概率。

分析

经过 n 次随机游动，点 P 出现在位置 s 的可能情况（表 2 是 r=3 的情况）

n \ s	…	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
1											1		1										
2										1		2		1									
3									1		3		3		1								
4								1		4		6		6		1							
5							1		5		10		11		5		1						
6						1		6		15		21		21		6		1					
7					1		7		21		35		42		21		7		1				
8				1		8		28		57		78		84		28		8		1			
9			1		9		36		85		126		162		84		36		9		1		
10		1		10		45		121		220		297		330		120		45		10		1	
…																							

表 2

由表 2 可得，经过 n 次随机游动，点 P 出现在位置 s 的可能情况的排列满足“对折”的“杨辉三角”的排列。

n \ s	…	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
1											1		1										
2										1		2		1									
3									1		3		3		1								
4								1		4		6		4+1		1							
5							1		5		10		10+1		5		1						
6						1		6		15		20+1		15+6		6		1					
7					1		7		21		35+1		35+7		21		7		1				
8				1		8		28		56+1		70+8		56+28		28		8		1			
9			1		9		36		84+1		126+9		126+36		84		36		9		1		
10		1		10		45		120+1		210+10		252+45		210+120		120		45		10		1	
…																							

表 3

对比表 1 和表 2 可得，表 2 是由表 1 关于 r=3“对折”以后相加而得（见表 3）。

不妨令 0＜r＜n，r∈Z，那么点P出现在位置s的概率P_2满足

当s＜2r-n时

$$P_2(X=s)=P_1(X=s)$$

当2r-n≤s≤r时

$$P_2(X=s)=P_1(X=s)+P_1(X=2r-s)$$

当s＞r时

$$P_2(X=s)=0$$

我们可以把反射壁看作是一面镜子，那么点P出现在位置s的概率就等于点P出现在位置s的概率与位置s关于反射壁r对称位置s’的概率之和。

解答

点P出现在数轴x各位置概率P_2的分布列

当n, r同为奇偶数时

X	-n	-(n-2)	···	2r-n-2	2r-n	2r-n+2	···	r-2	r
p	$\binom{n}{0}\cdot(1-p)^n$	$\binom{n}{1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}$	···	$\binom{n}{r-1}\cdot p^{r-1}\cdot(1-p)^{n-r+1}$	$\binom{n}{r}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}+\binom{n}{n}\cdot p^n$	$\binom{n}{r+1}\cdot p^{r+1}\cdot(1-p)^{n-r-1}+\binom{n}{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot(1-p)$	···	$\binom{n}{\frac{n+r}{2}-1}\cdot p^{\frac{n+r}{2}-1}\cdot(1-p)^{\frac{n-r}{2}+1}+\binom{n}{\frac{n+r}{2}+1}\cdot p^{\frac{n+r}{2}+1}\cdot(1-p)^{\frac{n-r}{2}-1}$	$\binom{n}{\frac{n+r}{2}}\cdot p^{\frac{n+r}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-r}{2}}$

当n, r不同为奇偶数时

X	-n	-(n-2)	···	2r-n-2	2r-n	2r-n+2	···	r-3	r-1
p	$\binom{n}{0}\cdot(1-p)^n$	$\binom{n}{1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}$	···	$\binom{n}{r-1}\cdot p^{r-1}\cdot(1-p)^{n-r+1}$	$\binom{n}{r}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}+\binom{n}{n}\cdot p^n$	$\binom{n}{r+1}\cdot p^{r+1}\cdot(1-p)^{n-r-1}+\binom{n}{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot(1-p)$	···	$\binom{n}{\frac{n+r-3}{2}}\cdot p^{\frac{n+r-3}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-r+3}{2}}+\binom{n}{\frac{n+r+3}{2}}\cdot p^{\frac{n+r-3}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-r+3}{2}}$	$\binom{n}{\frac{n+r-1}{2}}\cdot p^{\frac{n+r-1}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-r+1}{2}}+\binom{n}{\frac{n+r+1}{2}}\cdot p^{\frac{n+r+1}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-r-1}{2}}$

2.3 存在反射壁情况下的无限步一维随机游动

根据1.4的结论和2.2的分析得

当x≤r时

$$f_2(x)=f_1(x)+f_1(2r-x)$$

当x＞r时

$$f_2(x)=0$$

2.4 小结

由上可知，所得存在一道反射壁的情况下的一维随机游动中点P出现位置的概率密度函数 $f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2r)^2}{2}} & x\le r\\ 0 & x>r\end{cases}$ 能够较好的体现其概率分布，其中n越大吻合的越好。

.

图5

3.1 吸收壁定义

点p在数轴x上遇到吸收壁，即点p移动一个单位到吸收壁后，便停在原处不再作随机游动。

3.2 存在吸收壁情况下的有限限步一维随机游动

问题

位置 a 有一道反射壁，求点 P 经过 n 次随机游动出现在数轴 x 各位置的概率。

分析

经过 n 次随机游动，点 P 出现在位置 s 的可能情况（表 2 是 a=3 的情况）

s n	…	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
1											1		1										
2										1		2		1									
3									1		3		3		1								
4								1		4		6		3	2	1							
5							1		5		10		9		7		1						
6						1		6		15		19		9	14	6		1					
7					1		7		21		34		28		37		7		1				
8				1		8		28		55		62		28	74	28		8		1			
9			1		9		36		83		117		90		176		36		9		1		
10		1		10		45		119		200		207		90	352	120		45		10		1	
…																							

表 4

由表 4 可得，经过 n 次随机游动，点 P 出现在位置 s 的可能情况的排列满足“缺”的“杨辉三角”的排列。

s n	…	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
1																							
2																							
3																							
4														1		1							
5													1		5		1						
6												1		6		6		1					
7											1		7		21		7		1				
8										1		8		28		28		8		1			
9									1		9		36		84		36		9		1		
10								1		10		45		120		120		45		10		1	
…																							

表 5

对比表 4 和表 5 可得，表 4 是由表 1 减去表 5 而得，并且对应吸收壁 a 分别是表 5 的行和。（见表 5）

不妨令 0＜a＜n，a∈Z，那么点P出现在位置s的概率P_3满足

当s＜2a-n时

$$P_3(X=s)=P_1(X=s)$$

当2a-n≤s＜a时

$$P_3(X=s)=P_1(X=s)-P_1(X=2a-s)$$

当s=a时

$$P_3(X=s)=2\cdot\sum_{s=a}^{n}P_1(X=s)-P_1(X=a)$$

当s＞a时

$$P_3(X=s)=0$$

我们可以把吸收壁看作是一面特殊的镜子，那么点P出现在位置s的概率就等于点P出现在位置s的概率与位置s关于吸收壁a对称位置s’的概率之差，而点P出现在位置a的概率就等于点P出现在位置a的概率再加上两倍的所有位置s关于吸收壁a对称位置s’的概率之和。

解答

点P出现在数轴x各位置概率P_3的分布列

当n,a同为奇偶数时

X	-n	-(n-2)	…	2a-n-2	2a-n	2a-n+2
p	$\binom{n}{0}\cdot(1-p)^n$	$\binom{n}{1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}$	…	$\binom{n}{a-1}\cdot p^{a-1}\cdot(1-p)^{n-a+1}$	$\binom{n}{a}\cdot p^a\cdot(1-p)^{n-a}-\binom{n}{n}\cdot p^n$	$\binom{n}{a+1}\cdot p^{a+1}\cdot(1-p)^{n-a-1}-\binom{n}{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot(1-p)$

…	a-2	a
…	$\binom{n}{\frac{n+a}{2}-1}\cdot p^{\frac{n+a}{2}-1}\cdot(1-p)^{\frac{n-a}{2}+1}-\binom{n}{\frac{n+a}{2}+1}\cdot p^{\frac{n+a}{2}+1}\cdot(1-p)^{\frac{n-a}{2}-1}$	$2\cdot\sum_{i=0}^{\frac{n-a}{2}}\binom{n}{\frac{n+a}{2}+i}\cdot p^{\frac{n+a}{2}+i}\cdot(1-p)^{\frac{n-a}{2}-i}-\binom{n}{\frac{n+a}{2}}\cdot p^{\frac{n+a}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-a}{2}}$

当n,a不同为奇偶数时

X	-n	-(n-2)	…	2a-n-2	2a-n	2a-n+2
p	$\binom{n}{0}\cdot(1-p)^n$	$\binom{n}{1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}$	…	$\binom{n}{a-1}\cdot p^{a-1}\cdot(1-p)^{n-a+1}$	$\binom{n}{a}\cdot p^a\cdot(1-p)^{n-a}-\binom{n}{n}\cdot p^n$	$\binom{n}{a+1}\cdot p^{a+1}\cdot(1-p)^{n-a-1}-\binom{n}{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot(1-p)$

…	a-3	a-1	a
…	$\binom{n}{\frac{n+a-3}{2}}\cdot p^{\frac{n+a-3}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-a+3}{2}}-\binom{n}{\frac{n+a+3}{2}}\cdot p^{\frac{n+a-3}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-a+3}{2}}$	$\binom{n}{\frac{n+a+3}{2}}\cdot p^{\frac{n+a-3}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-a+3}{2}}-\binom{n}{\frac{n+a+1}{2}}\cdot p^{\frac{n+a+1}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-a-1}{2}}$	$2\cdot\sum_{i=0}^{\frac{n-a-1}{2}}\binom{n}{\frac{n+a+1}{2}+i}\cdot p^{\frac{n+a+1}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-a-1}{2}}$

3.3 存在反射壁情况下的无限步一维随机游动

根据1.4的结论和3.2的分析得

当x＜a时

$$f_3(x)=f_1(x)-f_1(2a-x)$$

当x=a时

$$f_3(x)=2\cdot\int_a^{\infty} f_1(x)\ \mathrm{d}x$$

当x＞a时

$$f_3(x)=0$$

3.4 小结

由上可知，所得存在一道吸收壁的情况下的一维随机游动中点P出现位置的概率密度函数

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2a)^2}{2}} & x<a\\ \left(2\cdot\displaystyle\int_a^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x\right)\cdot dirac(x-a) & x\geq a\end{cases}$$

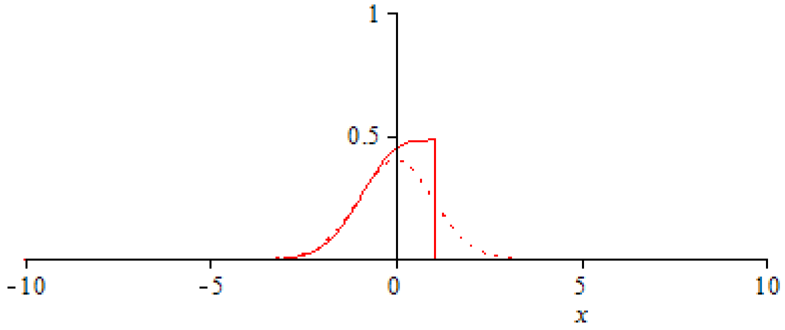
能够较好的体现其概率分布，其中n越大吻合的越好。（dirac即狄拉克函数）

.

图6

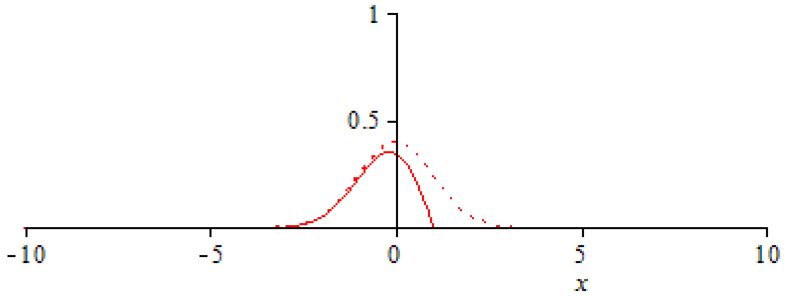
结论

经过多种情况的讨论和分析，我们发现随机游动的最终趋势是满足正态分布的。而在反射壁的干扰下正态分布会在反射壁附近产生聚集现象(见图7)，反射壁离初始位置越近，聚集现象越明显。在吸收壁的干扰下正态分布会在吸收壁附近产生排斥现象（见图8），离吸收壁越近以及吸收壁离初始位置越近，排斥现象越明显。



r=1

图7



a=1

图8

参考文献

《概率论与数理统计》 科学出版社 2006年8月版

《趣味随机问题》 科学出版社 2008年8月版

《从博弈问题到方法论学科——概率论发展史研究》 科学出版社 2010年7月版